Isidoro peroni

IL TETRAEDRO DI CAUCHY E IL SENSORE DI REYNOLDS

GIUGNO 2005 - SxT Scaffali N°5

ScienzaPerTutti
SxT- Scaffali
n.5-2005

1. Tensori

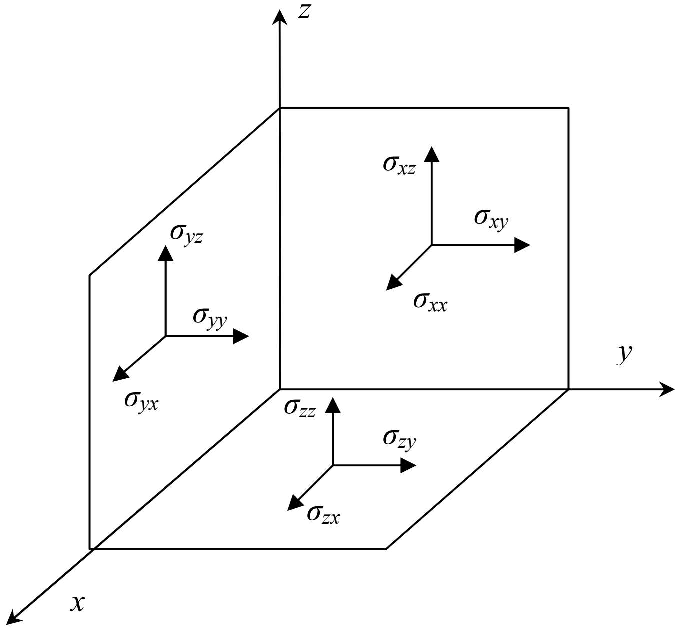
Tutte le grandezze fisiche possono essere espresse efficacemente come grandezze tensoriali.

Il concetto di tensore può essere visto come una generalizzazione del più familiare concetto di vettore.
Un vettore è una grandezza fisica caratterizzata da una intensità e una direzione in uno spazio a più dimensioni: quindi è un insieme di tanti numeri, quante sono le dimensioni dello spazio, rappresentanti le componenti (proiezioni sugli assi di riferimento): è quindi una grandezza ad un solo indice. Ad esempio le tre componenti secondo gli assi coordinati di una forza possono essere indicate sinteticamente come $\mathbf{f}_i$ (i = 1,2,3) = (f_1, f_2, f_3) o più comunemente (f_x, f_y, f_z).
Possiamo quindi dire che un vettore è un tensore del primo ordine.

Se una grandezza fisica non ha bisogno di indici per essere definita (come ad esempio la densità di massa di un solido) diciamo che si tratta di uno scalare, cioè di un tensore di ordine zero.
I tensori veri e propri sono quelli a più indici.

1.1 Tensore degli sforzi

Ad esempio il tensore degli sforzi è un tensore a due indici, cioè del secondo ordine.
Infatti per esprimere lo stato di sollecitazione in un punto di un corpo, nello spazio tridimensionale non bastano tre numeri, ma ne occorrono nove (3^2), che poi per motivi di simmetria si ridurranno a sei indipendenti. Per caratterizzare completamente lo sforzo, definito come una forza per unità di superficie, occorre conoscere su ognuno dei tre piani paralleli ai piani coordinati le tre componenti della forza nelle tre direzioni coordinate.

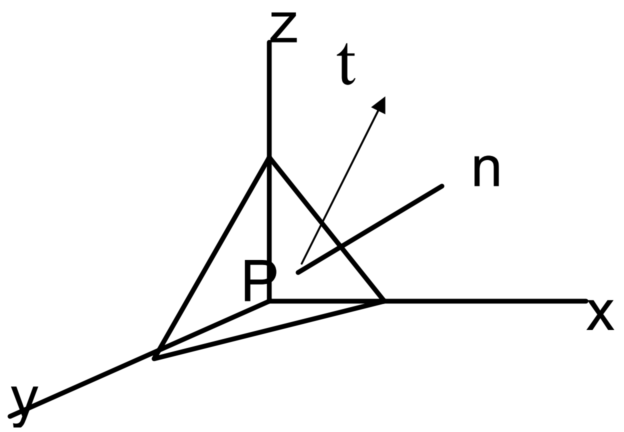


In simboli σ_{ij} (i, j =1, 2, 3) = $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}; \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}; \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$ che spesso viene scritto come $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}; \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}; \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$.
Con σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} indichiamo rispettivamente le componenti della forza agenti sulla superficie normale all'asse x, nelle

ScienzaPerTutti
SxT- Scaffali
n.5-2005

direzioni coordinate x, y, z; con σ_{yx}, σ_{yy}, σ_{yz}, le componenti della forza agenti sulla superficie normale all'asse y, nelle direzioni coordinate x, y, z e con σ_{zx}, σ_{zy}, σ_{zz}, le componenti della forza agenti su una superficie normale all'asse z nelle direzioni coordinate x, y, z .

1.2 Tetraedro di Cauchy



E' un tetraedro (immaginario) con tre facce triangolari a spigoli paralleli agli assi coordinati convergenti nel generico punto P (x,y,z) e da una quarta faccia triangolare la cui normale è orientata arbitrariamente. Il tetraedro serve per mostrare che, noto lo stato tensionale su tre piani perpendicolari è possibile ricavare lo stato tensionale su un qualunque altro piano inclinato. Al tendere a zero delle dimensioni degli spigoli del tetraedro, le eventuali forze di volume, come ad esempio il peso, (infinitesime del terzo ordine) vanno a zero prima delle forze di superficie (infinitesime del secondo ordine). Allora, note le componenti del tensore (cioè le forze per unità di superficie sulle tre superfici parallele ai piani coordinati), dall'equilibrio del tetraedro, è semplice ricavare nel punto P le componenti t_x , t_y , t_z , della forza **t** per unità di superficie la cui normale **n** sia individuata dalle sue componenti (coseni direttori) n_x, n_y, n_z .
Infatti per l'equilibrio delle forze agenti sul tetraedro infinitesimo nelle direzioni delle tre componenti si ha:

$$t_x \, dA = 1/2 \, (\sigma_{xx} \, dy \, dz + \sigma_{yx} \, dz \, dx + \sigma_{zx} \, dx \, dy)$$
$$t_y \, dA = 1/2 \, (\sigma_{xy} \, dy \, dz + \sigma_{yy} \, dz \, dx + \sigma_{zy} \, dx \, dy)$$
$$t_z \, dA = 1/2 \, (\sigma_{xz} \, dy \, dz + \sigma_{yz} \, dz \, dx + \sigma_{zz} \, dx \, dy)$$

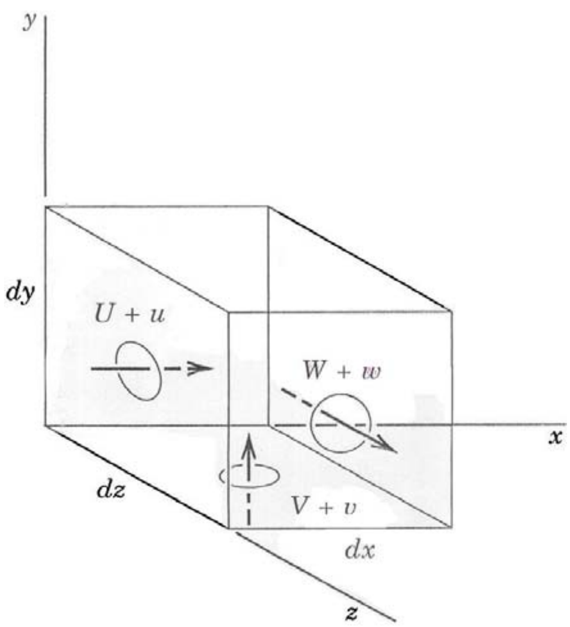
dove dA è la superficie infinitesima della quarta faccia del tetraedro.

Poiché le proiezioni della superficie di normale **n** sui piani coordinati si ottengono proprio dall'area dA per i coseni direttori di **n** ,
infatti : $dA\ n_x = \frac{1}{2}\, dy\, dz$, $dA\ n_y = \frac{1}{2}\, dz\, dx$, $dA\ n_z = \frac{1}{2}\, dx\, dy$,
in conclusione si può scrivere, dividendo per dA ambo i membri delle tre equazioni di equilibrio:

$$t_x = (\sigma_{xx}\, n_x + \sigma_{yx}\, n_y + \sigma_{zx}\, n_z)$$
$$t_y = (\sigma_{xy}\, n_x + \sigma_{yy}\, n_y + \sigma_{zy}\, n_z)$$
$$t_y = (\sigma_{xz}\, n_x + \sigma_{yz}\, n_y + \sigma_{zz}\, n_z)$$

Quindi, dalla conoscenza delle componenti del tensore degli sforzi σ_{ij}, si possono determinare le componenti dello sforzo su una qualunque superficie di normale **n** nel punto P (x,y,z): in sostanza è conosciuto completamente lo stato di tensione nel punto.

2. Tensore di Reynolds



Le sue componenti sono chiamate sforzi o sforzi apparenti di Reynolds e rappresentano i valori medi dei flussi per unità di area della quantità di moto dovuta alla turbolenza, cioè si ha:

$R_{ij} = \rho$ (uu, uv, uw ; vu, vv, vw; wx, wv, ww)

ρ è la densità di massa del fluido e u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t) sono le componenti istantanee (a valor medio nullo) della velocità del flusso turbolento intorno ai valori medi temporali.

Indicando con U (x,y,z), V (x,y,z), W (x, y, z) maiuscole i valori medi delle componenti della velocità, la portata in massa che passa attraverso la superficie unitaria normale all'asse x, nell'unità di tempo sarà ρ (U + u) e la quantità di moto del flusso turbolento avrà componenti sui tre assi

$\rho\,(U+u)\ u,\ \ \rho\,(U+u)\ v,\ \ \rho\,(U+u)\ w$

Mediando nel tempo, poiché le u ,v, w hanno media nulla, otteniamo le componenti di tali quantità di moto attraverso la superficie normale all'asse x che valgono appunto:

$\rho\,u\,u\,,\ \ \rho\,u\,v,\ \ \rho\,u\,w$

Analogamente per le quantità di moto dei flussi attraverso le superfici unitarie normali agli assi y e z si avrà:

$\rho\,v\,u,\ \ \rho\,v\,v,\ \ \rho\,u\,w \quad e \quad \rho\,w\,u,\ \ \rho\,w\,v,\ \ \rho\,w\,w$

Tali grandezze rappresentano degli sforzi (forze per unità di superficie), agenti sui piani coordinati perfettamente in analogia col tensore degli sforzi sopra definito e rappresentano delle resistenze al flusso dovute alla turbolenza.